Realized Volatility Distribution in Superstatistics

高石, 哲弥

Realized Volatility Distribution in Superstatistics

広島経済大学
高石　哲弥

1．　Introduction

株価や為替などの収益率の変動性を表す量としてボラティリティと呼ばれる指標があり、これは金融資産のリスク管理やオプション価格計算などに利用される重要なものである。ボラティリティは直接測定できるものではないので、推定する必要がある。ボラティリティを推定する手法の１つとして、ボラティリティ変動の性質を取り入れたモデルからボラティリティを推定する手法がある。ボラティリティには、ボラティリティが上昇するとボラティリティの高い期間がしばらく続く“ボラティリティクラスタリング”という性質が現れる。その性質もつモデルとしては、Autoregressive Conditional Heteroskedasticity（ARCH）モデル[1]や Generalized ARCH（GARCH）モデル[2]が知られている。また、収益率に対するボラティリティの非対称性も取り入れたモデルとして Exponential GARCH モデル[3]や GJR モデル[4]、Quadratic GARCH モデル[5,6]等の非対称 GARCH モデルが提唱されている。

モデルによるボラティリティ推定の問題点は、利用するモデルによって推定値が異なってしまうことである。モデルによらないボラティリティの推定法として、高頻度データを利用した Realized Volatility(RV)による推定法がある[７]。高頻度データを利用すると日中の細かい収益率の変化が計算でき、RV によって日次ボラティリティが精度よく推定できる。最近は高頻度データが利用しやすくなっているので、RV による推定がよく行われるようになっている。本研究では、日本市場におけるいくつかの株価に対して RV を計算し、その RV の分布を求め、日次収益率が超統計的な見方で表されるかどうかを調べる。

２．Realized volatility

時刻（日次） t における金融資産の価格を p_t とすると、収益率 r_t は

$$r_t = \log p_t - \log p_{t-1} \qquad (1)$$

で定義される。そして、収益率は

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t \qquad (2)$$

と表されるとする。ボラティリティは σ_t または σ_t^2 で定義される。ここで、ε_t は標準正規分布に従う変数とする。日次 t における RV_t は、日中収益率の２乗和を使って以下のように計算される。

$$RV_t = \sum_{i=1}^{n} r_{t-1+i/n}^2 \qquad (3)$$

ここでの r_i は高頻度データから計算した日中の n 個の収益率である。

日中の対数価格が時間 s の関数 $\ln p(s)$ として、以下の拡散過程に従っているとする。

$$d \ln p(s) = \mu(s)ds + \sigma(s)dW(s) \qquad (4)$$

ここで、$\mu(s)$は瞬間的なドリフト、$\sigma(s)$は瞬間的なボラティリティと呼ばれるものである。そして、

t 日における真の日次ボラティリティσ_t^2は

$$\sigma_t^2 = \int_{t-1}^{t} \sigma^2(s)ds \qquad (5)$$

によって与えられる。（3）式のRV_tはnを大きくすると（5）式のσ_t^2に近づくので、nが十分大きければ、RV_tは真のボラティリティの精度の良い推定値となる。しかし、nが大きくなり時間間隔が細かくなりすぎると、市場のマイクロストラクチャーによるノイズが大きくなることが知られており、よく用いられるのは5分間隔の価格である。そこで、本研究でも5分ごとの価格を利用した。

日本の市場では、昼休みと夜間は取引が無いので、昼休みと夜間の間の収益率の2乗をそのまま利用するのは良くない。また、昼休みと夜間の収益率を除いた場合は、ボラティリティを過小評価してしまう。そこで、本研究ではHansenとLundeらの方法[8]に従って、昼休みと夜間の収益率の2乗を除いてRV_tを計算し、日次収益率の分散と一致するように修正ファクターをかけることにする。T個の日次収益率を$R_1, R_2, \cdots, R_T$とすると修正ファクターcは以下のように計算される。

$$c = \sum_{t=1}^{T} (R_t - \overline{R})^2 / \sum_{t=1}^{T} RV_t \qquad (6)$$

ここで、$\overline{R}$は日次収益率の平均値である。

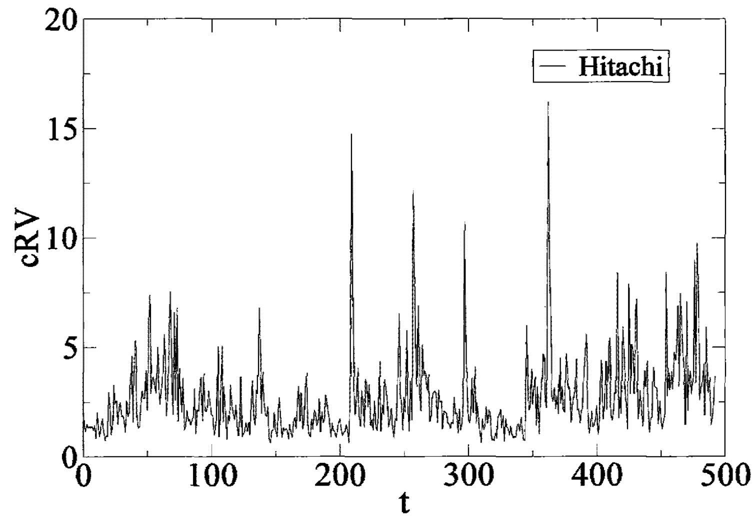

図1：日立の株価の修正されたRV時系列。

本研究では、２００６年3月1から２００８年２月２８日までの２年間のデータを利用した。解析した株価は、東京証券取引所の比較的取引の多い7銘柄を利用した。7銘柄の内訳は、(1)みずほフィナンシャルグループ、(2)トヨタ自動車、(3)ソニー、(4)野村ホールディングス、(5)日立製作所、(6)大和証券グループ、(7)新日本製鐵である。図1は日立の株価に対して求めたRVに修正ファクターcをかけたcRVの時系列である。

（2）式から、ボラティリティで収益率を割った値は$r_t / \sigma_t = \varepsilon_t$であるから、RVがボラティリティの良い推定値になっているなら収益率を$cRV^{1/2}$で割った（標準化された）値の分布は正規分布で表さ

れると期待される。

図 2 は $r_t/(cRV_t)^{1/2}$ の分布を表している。図中の実線は正規分布を表しており、$r_t/(cRV_t)^{1/2}$ は正規分布でよく表される。

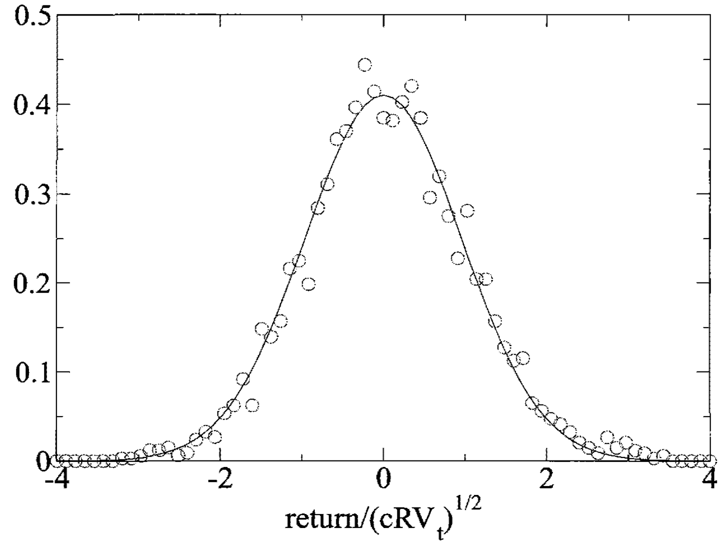

図２ ： ７銘柄の収益率を利用して求めた $r_t/(cRV_t)^{1/2}$ の分布。

3. Superstatistical Analysis

Superstatistics（超統計）は Beck と Cohen[9]によって導入された。ここでは、株価収益率の統計性が超統計的に表せるかどうかを調べる。ボラティリティが時間的にゆっくり変化しているとし、1 日の中ではボラティリティが変わらないとする。そして、収益率 r が平衡状態のガウス分布 $\exp(-r^2/(2\sigma_t^2))$ に従っているとする。ボラティリティはゆっくり変化するので、長い時間スケールでのボラティリティの分布を $P(\sigma^2)$ とすれば、超統計的見方では、収益率の分布 $P(r)$ は以下のように表せる。

$$P(r) = \int_0^\infty P(\sigma^2)(2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-\frac{r^2}{2\sigma^2}) d\sigma^2 \qquad (7)$$

$P(\sigma^2)$ は予め、どのような関数であるかわかっている訳ではない。本研究では、$P(\sigma^2)$ を RV から求め、どのような関数が一番良くボラティリティの分布を表すのかを調べる。図４は日立の株価に対して求めた $cRV_t(\approx \sigma_t^2)$ の分布である。$P(\sigma^2)$ の関数形として、ここではガンマ分布、逆ガンマ分布、対数正規分布の３つを仮定して、どの分布が $P(\sigma^2)$ の分布を良く表しているのかを調べた。図３中の３つの破線は３つの分布に対するフィッティングの結果を表している。フィッティングの結果からは逆ガンマ

分布がもっとも良くボラティリティの分布を表しているという結果がでた。日立以外の他の株価に対しても同様の結果であった。

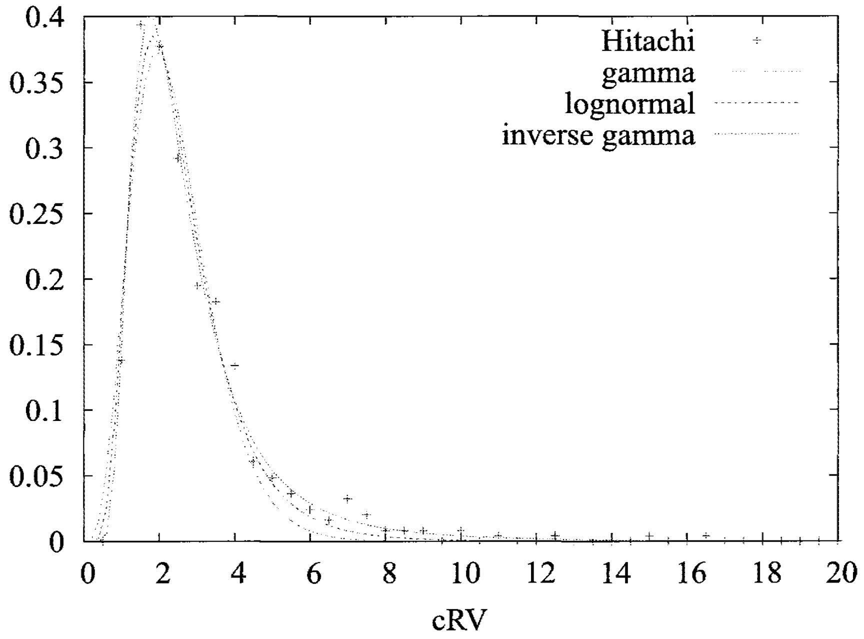

図３：日立の株価の RV から求めた $P(\sigma^2)$ の分布。

４．Conclusions

本研究では、東京証券取引所の 7 銘柄の株価に対して RV を求めた。RV によって標準化した収益率の分布は正規分布に近いことがわかった。これは、以前に Andersen らによって調べられている結果[10]と同じである。ボラティリティの分布の関数形は、ガンマ分布、逆ガンマ分布、対数正規分布のうち、逆ガンマ分布が一番良くボラティリティの分布を表すことがわかった。

参考文献

[1] R.F. Engle, Econometrica **60** (1982) 987-1007.

[2] T.Bollerslev, Journal of Econometrics **31** (1986) 307-327.

[3] D.B.Nelson, Econometrica **59** (1991) 347-370.

[4] L.R.Glston, R.Jaganathan and D.E.Runkle, Journal of Finance **48** (1993) 1779-1801.

[5] R.F.Engle and V.Ng, Journal of Finance **48** (1993) 1749-1778.

[6] E.Sentana, Review of Economic Studies **62** (1995) 639-661.

[7]T.G.Andersen, T.Bollerslev, F.X.Diebold and P.Labys, Journal of the American Statistical Association **96** (2001) 42-55.

[8] P.R.Hansen and A.Lunde, Journal of Financial Econometrics **3** (2005) 525-554.

[9]C.Beck and E.G.D.Cohen, Physica A **322** (2003) 267.

[10] T.G.Andersen, T.Bollerslev, F.X.Diebold and H.Ebens, Journal of Financial Economics **61** (2001) 43-76.